工学部講義

論理回路基礎（2）

坂井　修一
東京大学大学院 情報理工学系研究科 電子情報学専攻
東京大学　工学部　電気工学科

- はじめに
- 論理演算

講義の概要と予定

休講： 12／2， 試験： 3月3日（予定）

2．論理演算

- **論理演算**
  - 論理関数を用いた演算のこと。
    - 1出力論理関数とは、次のようなもの
      F： $(I_1, I_2, \ldots I_n) \rightarrow O$、 I_j, O：0または1
      1出力論理関数は、全部で 2^{2^n}通り存在し得る
  - 組合せ回路
    - 論理演算を実現する回路のこと
- **論理関数の表現**
  - 真理値表
  - ブール代数
  - MIL記号

論理関数の表現

- **真理値表**

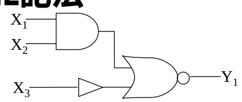
X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0

○　正確：　入出力のパターンをすべて列挙
×　量！　意味？

- **ブール代数**
  - $Y_1 = X_1 \cdot X_2 + X_3$

○　正確で簡潔。直感に訴えやすい

- **MIL記法**



○　4つの記号で図示。理解しやすい
回路図に結びつけやすい

3つの基本関数 - AND, OR, NOT -

- **真理値表による定義**

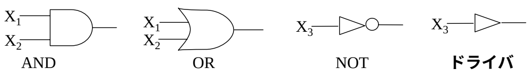
X_1	X_2	AND	OR
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

X_1	NOT
0	1
1	0

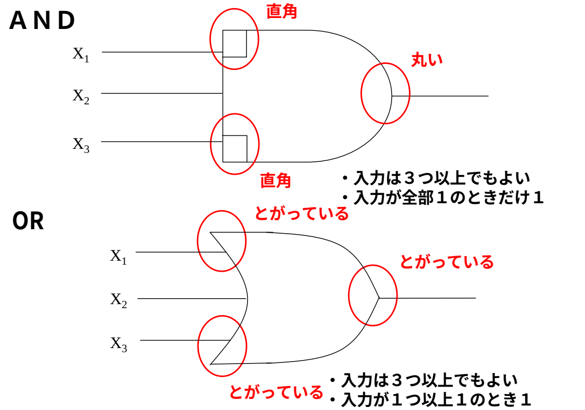
- **ブール代数**： 論理変数と論理演算を記号化して表現する

AND: $X_1 \cdot X_2$, OR: X_1+X_2 NOT: $\overline{X_1}$

- **MIL記法**： 4つの図式と結線で表現する



MIL記法の書き方 (米国military)



NAND, NOR

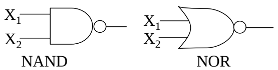
- **真理値表による定義**

X_1	X_2	NAND	NOR
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

- **ブール代数**

NAND: $\overline{X_1 \cdot X_2}$, NOR: $\overline{X_1+X_2}$

- **MIL記法**



XOR, EQUIV

- **真理値表による定義**

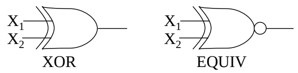
X_1	X_2	XOR	EQUIV
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

XORは入力の１つだけ１のとき１
EQUIVは$X_1 = X_2$のとき１

- **ブール代数**

XOR: $X_1 \oplus X_2$, EQUIV: $\overline{X_1 \oplus X_2}$

- **MIL記法**



完備性 (Completeness)

- 「M入力N出力のすべての論理関数を、少数の基本論理関数の組合せで表現できる」とき、その基本論理関数の集合を、「完備集合」(Complete Set)という
- 完備集合の例
  - {AND, OR, NOT}
  - {AND, NOT}
  - {OR, NOT}
  - {NAND}
  - {NOR}

完備性の証明手順(1) {AND, OR, NOT}

- 帰納法で証明する
  1．1入力1出力の論理関数 (全部で2種類) がすべて{AND, OR, NOT}の組合せで表現できることを証明する (自明)

  2．M入力1出力の関数を{AND, OR, NOT}の組合せで表現できたと仮定して、M＋1入力1出力の関数が表現できることをいう

I_1 I_2 …. I_M	I_{M+1}	Out
F_1	0	1
	0	0
	.	.
	0	1
F_2	1	0
	1	1
	.	.
	1	0

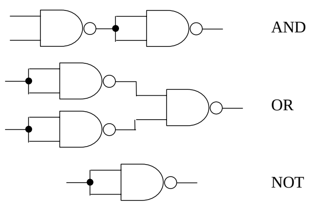
$$F = F_1 \bullet \overline{I_{M+1}} + F_2 \bullet I_{M+1}$$

(1)F_1, F_2はM入力：帰納法の仮定より表現可能
(2)上の式は、F_1, F_2, I_{M+1}と２入力のAND, OR, NOTだけでできている

→　Fは{AND, OR, NOT}の組合せで表現可能

完備性の証明手順(2) 一般の場合

- (さきと同様に) 帰納法で証明する
- 当該集合の要素で{AND, OR, NOT}が作れることを言う
  - 例：{NAND}



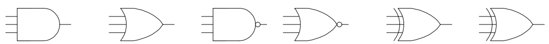
ブール代数

- 演算規則
  - $X + 0 = X$　　$X \cdot 0 = 0$　　$X + 1 = 1$　　$X \cdot 1 = X$
  - $X + X = X$　　$X \cdot X = X$　　$X + \overline{X} = 1$　　$X \cdot \overline{X} = 0$
  - $X + Y = Y + X$　　$X \cdot Y = Y \cdot X$　(交換法則)
  - $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$　　$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$　(結合法則)
  - $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$　　$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$ (分配法則)
  - $\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$　　$\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$　(ド･モルガンの定理)

多入力素子

- 多入力素子
  - ２入力の演算について、交換法則と結合法則が成り立つときに、これを多入力演算（３個以上の入力をもつ演算）に拡張することができる

X_0	X_1	X_2	AND	OR	NAND	NOR	XOR	EQ
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1



用語の定義

- リテラル
  - ある論理変数Xが与えられたとき、Xまたは$\overline{X}$をリテラル(literal)と呼ぶ
- 積項・和項
  - リテラルの論理積（２変数以上、３変数以上であってもよい）を積項(product term)と呼ぶ。同様に、リテラルの論理和を和項(sum term)と呼ぶ。
- 最小項・最大項
  - N個のリテラルの論理積（ただしリテラルはすべて異なる）からなる積項を最小項(minterm)と呼ぶ。同様に、N個のリテラルの論理和（ただしリテラルはすべて異なる）からなる和項を最大項(maxterm)と呼ぶ。

標準形

- **加法標準形（積和標準形）**
  - 論理関数を、最小項の論理和として表現したもの
  - **論理関数は必ず加法標準形で表現される（展開定理）**
    - **証明：　完備性の証明の後半を繰り返し用いればよい**

$$
\begin{aligned}
& F(I_1, I_2, \ldots\ I_M) \\
= \ & \overline{I_1}\cdot\overline{I_2}\cdot\ldots\cdot\overline{I_M}\cdot F(0,0,\ldots.0) \\
+ \ & I_1\cdot\overline{I_2}\cdot\ldots\cdot I_M\cdot F(0,0,\ldots.1) \\
& \ldots\ldots\ldots \\
+ \ & I_1\cdot I_2\cdot\ldots\cdot I_M\cdot F(1,1,\ldots.1)
\end{aligned}
$$

加法標準形と真理値表

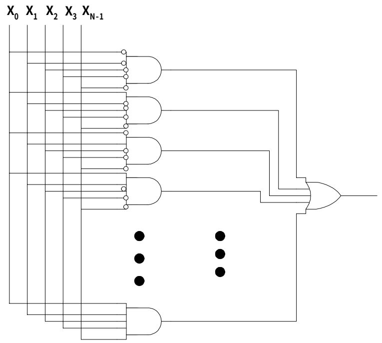
- **加法標準形の最小項**
  - **真理値表で、論理関数の値が1になるときのリテラルの組み合わせをあらわしている**
- **加法標準形**
  - **「論理関数の値が1になるときのリテラルの積（AND）」の論理和（OR）**

４入力１出力論理関数の真理値表

X	Y	Z	W	O
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$\overline{XY}ZW+\overline{X}Y\overline{ZW}+\overline{X}Y\overline{Z}W+X\overline{YZW}+X\overline{Y}Z\overline{W}+X\overline{Y}ZW+XYZW$

加法標準形の一般形



注意．加法標準形は、いつも論理関数のもっとも簡単な表現法になるとは限らない

加法標準形の記述法

- 例

４入力１出力論理関数の真理値表

X	Y	Z	W	O	
0	0	0	0	0	(0)
0	0	0	1	0	(1)
0	0	1	0	1	(2)
0	0	1	1	1	(3)
0	1	0	0	1	(4)
0	1	0	1	0	(5)
0	1	1	0	1	(6)
0	1	1	1	0	(7)
1	0	0	0	1	(8)
1	0	0	1	0	(9)
1	0	1	0	1	(10)
1	0	1	1	1	(11)
1	1	0	0	0	(12)
1	1	0	1	0	(13)
1	1	1	0	0	(14)
1	1	1	1	1	(15)

$$O = \Sigma\,(2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 15)$$

加法標準形の記述法（続）

1. 真理値表を、「入力の昇順」に書き、行番号（0から）を上から順番につける。
   入力の昇順とは、「N個の入力をNビットの2進数とみなして小さいものから順番」、という意味
2. 1で出力が1になる行の行番号をΣ（）の括弧内に並べて書く
   各行が該当する最小項を表す

練習問題 ＝ 宿題

1 ド･モルガンの定理を真理値表を用いて証明せよ

2 次の論理式を加法標準形に直せ。答えはブール代数の式とΣ（）の式の両方で示せ。
- $X \oplus Y$
- $X \oplus Y \oplus Z$
- $(X+Y+Z)\cdot(Y+Z+W)$

3 論理関数を、最大項の論理積として表現したものを「乗法標準形」と呼ぶ。
- 乗法標準形の求め方を示せ
- 2の最初の2つの式を乗法標準形にせよ